Capítulo 7

Learning-by-Doing, Externalidades e Crescimento

O modelo de Mankiw, Romer e Weil (MRW) permite reduzir as limitações do modelo de Solow no que diz respeito à explicação do processo de convergência entre países pobres e países ricos em virtude do ritmo da convergência ficar significativamente mais lento e, portanto, mais de acordo com a realidade empírica. Apesar deste resultado, a existência de convergência entre países pobres e ricos continua a ser um dos resultados fundamentais do modelo de MRW, e tal como no modelo de Solow, esta convergência verificar–se–à independentemente das condições de partida (ou iniciais) entre estes dois grupos de países. Este ponto resulta, por um lado, de se continuar a admitir uma função de produção que apresenta rendimentos marginais decrescentes em relação ao capital físico e, por outro, do crescimento continuar a ter uma natureza totalmente exógena no modelo de MRW, pelo que a política económica pouco ou nada pode fazer para influenciar o ritmo do crescimento no longo prazo.

O aspecto que acaba por ser determinante nos resultados dos modelos acima referidos está relacionado com a natureza do conhecimento tecnológico (ou conhecimento humano em termos gerais). Este conhecimento, sendo o motor do crescimento económico, continua a ser tido como um bem que surge de uma forma totalmente exógena no processo económico, não requerendo nem recursos económicos para a sua obtenção, nem tempo, nem a acumulação de qualquer outro activo económico para que a mesma possa ser levada a efeito. Como vários autores referiram no passado, este tipo de conhecimento tecnológico surge como "manna from heaven",[1] totalmente livre e sem custos para qualquer economia, em qualquer parte do mundo, e independente do seu estágio de desenvolvimento económico e social.

No sentido de eliminar a natureza totalmente exógena do crescimento económico presente nos modelos anteriores, Kenneth Arrow em 1962 e Paul Romer em 1986,[2] desenvolveram um modelo de crescimento económico em que este passa (ou pode passar) a ter uma natureza endógena. O ponto crucial do modelo consiste em assumir que a incorporação do conhecimento tecnológico no processo de produção de bens materiais passa a depender positivamente do nível de acumulação de capital físico. Ou seja, quanto maior for o nível do stock de capital físico, maior tenderá a ser o benefício que a economia poderá retirar do nível do conhecimento tecnológico, resultando este maior benefício de um processo de "learning–by–doing".

Este processo de "learning–by–doing" pode ser sintetizado do seguinte modo. Suponha que o nível do conhecimento tecnológico (A_t) depende positivamente do nível do stock de capital físico (K_t). Como K_t reflecte o comportamento ao longo do tempo de uma variável endógena, o comportamento de A_t passa também a ser endogenamente determinado. Isto significa que se uma economia não acumular capital físico, não poderá usufruir dos benefícios económicos do conhecimento tecnológico, e por isso, o processo dinâmico do crescimento económico representado desta forma apresenta uma vantagem significativa sobre os dois modelos anteriores (Solow e MRW). No entanto, note que a obtenção de A_t continua a não representar *de per si* um custo para a economia, em virtude da mesma aparecer como um "efeito lateral" do processo de acumulação de capital físico, ou seja, surge como uma *externalidade positiva* da acumulação de capital.

Vamos demonstrar que no modelo de "learning–by–doing" a existência de externalidades positivas associadas à acumulação de capital físico leva a uma situação em que a taxa de crescimento de longo prazo passa a ser determinada por forças endógenas ao funcionamento de uma economia, como sejam a taxa de poupança (s) e o coeficiente de aprendizagem (a). Devemos notar que apesar deste modelo representar um avanço relativamente aos anteriores, apresenta ainda uma limitação bastante séria, na medida em que o conhecimento tecnológico não é determinado como um processo que resulta de uma actividade de produção de um novo activo (com custos para a economia). Ou seja, apesar do conhecimento

[1] Este termo significa uma dádiva divina ou dos céus.

[2] As referências completas dos dois artigos são os seguintes: Arrrow, K. J. (1962), "The Economic Implications of Learning By Doing", *Review of Economic Studies*, 29 (June), 155–173; Romer, P. M.(1986), "Increasing Returns and Long Run Growth", *Journal of Political Economy*, 94 (October), 1002–1037.

tecnológico ser o factor fundamental para o crescimento económico, as empresas e outros agentes económicos não mostram quaisquer interesses ou incentivos para a busca deliberada deste mesmo conhecimento, e, obviamente, para beneficiarem do mesmo quando produzido.

7.1 Apresentação do Modelo

Vamos considerar uma economia onde se produz um único bem final (Q_t), o qual pode ser destinado a consumo (C_t) ou a investimento (I_t). Este bem é produzido com a utilização de três factores produtivos: o capital físico (K_t), o trabalho (L_t), e o conhecimento tecnológico (A_t). A função de produção desta economia é de tipo Cobb-Douglas (e com progresso técnico *labour-augmenting*), sendo dada por

$$Q_t = K_t^{\alpha} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha} \qquad , \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{7.1}$$

Como foi dito, neste modelo existe o objectivo de endogeneizar o conhecimento tecnológico, que deixa de surgir como uma "dádiva dos céus", passando a ser o resultado de um processo dinâmico explicado por forças económicas endógenas. Conforme foi referido na secção anterior, a forma escolhida por Arrow e Romer para endogeneizar o conhecimento tecnológico consiste em assumir que este é determinado pelas externalidades positivas que resultam do processo de acumulação de capital. Isto é, ao acumular capital físico de forma permanente, a economia ganha experiência e eficiência no processo produtivo, levando ao aumento do nível de conhecimento e progresso tecnológico existente na economia.

A inspiração para a introdução deste processo de "learning–by–doing" nos modelos de crescimento, feito por Arrow em 1962, está relacionada com um dos aspectos produtivos que mais fascinaram os engenheiros durante a segunda Guerra Mundial. Foi observado que existia uma redução significativa de custos de produção unitários quando o volume de produção aumentava, por exemplo, na produção de aviões de combate e comerciais, na produção de navios de guerra e comerciais, na produção de automóveis, etc.. Com a produção em escala, gerava–se um processo de aprendizagem que eliminava custos e permitia melhorar a qualidade final da produção. Como a produção em escala requer a acumulação de capital, parece lógico associar o processo de "learning–by–doing" à referida acumulação. Formalmente, o processo de transmissão económica passa a ser do tipo

$$\begin{array}{ccccc} & \multicolumn{3}{c}{\longrightarrow} & \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_t & \longrightarrow & A_t & \longrightarrow & Q_t \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ & \multicolumn{3}{c}{\longleftarrow} & \end{array}$$

Seguindo este raciocínio, podemos representar o comportamento dinâmico da variável conhecimento tecnológico pela seguinte expressão

$$A_t = a \cdot K_t^{\theta} \tag{7.2}$$

onde as restrições dos parâmetros são as seguintes: $a > 0$, $\theta > 0$. O parâmetro a representa o coeficiente de aprendizagem, enquanto que o expoente θ é a elasticidade do conhecimento tecnológico relativamente ao stock de capital.

Esta elasticidade permite–nos saber se a produção de conhecimento tecnológico tem rendimentos marginais decrescentes, constantes ou crescentes, dependendo do seu valor ser inferior, igual, ou superior à unidade, respectivamente. De facto, o valor assumido por θ dentro destas três possibilidades acaba por ser o ponto crucial deste modelo, pois deste vai resultar o tipo de trajectória de crescimento previsto para a economia no longo prazo. Por este motivo, o estudo dos diferentes valores deste parâmetro irá ser feito de forma detalhada mais à frente.

Os restantes factores produtivos, o capital físico e o factor trabalho, comportam-se como no modelo de Solow. O trabalho evolui a uma taxa constante, exógena, e positiva, sendo esta designada por n, vindo

$$\dot{L}_t = n \cdot L_t \quad , \quad n \geq 0 \tag{7.3}$$

O capital físico corresponde a todo o produto final que não se destina a consumo, sendo dado por

$$\dot{K}_t = \underbrace{s \cdot Q_t}_{I_t} - \delta K_t \tag{7.4}$$

onde s é a taxa de poupança da economia, $(0 < s < 1)$, e δ é a taxa de depreciação do capital físico $(0 < \delta < 1)$.

7.2 A Dinâmica do Modelo

Nesta secção a nossa preocupação é responder às três questões habituais que se colocam perante um modelo de crescimento, sendo elas:

- O modelo tem equilíbrio de longo prazo?
- O equilíbrio é único?
- O equilíbrio é estável?

Para respondermos a estas questões devemos reduzir a dinâmica do modelo ao menor número possível de equações de movimento. Nos modelos de Solow e de MRW utilizámos um método que consistia em passar as equações que nos dão o comportamento das variáveis endógenas à forma intensiva. Assim eliminávamos várias equações de movimento do estudo do sistema dinâmico, ficando apenas com uma ou duas equações diferenciais consoante o modelo estudado.[3]

No modelo *learning by doing* poderíamos também utilizar o mesmo método acima descrito. No entanto, devido à particularidade da existência de vários tipos de comportamentos dinâmicos neste modelo — conforme iremos ver, dependendo dos valores que θ assuma dentro das três possibilidades acima referidas, uns tendem para um equilíbrio de longo prazo, outros fazem com que a economia apresente crescimento económico explosivo, ou seja, não haja equilíbrio de longo prazo — é mais fácil estudar a dinâmica do modelo usando uma técnica alternativa. Esta técnica consiste em expressar a dinâmica do modelo em termos de taxas de crescimento das várias variáveis que estão envolvidas no processo dinâmico.

O primeiro passo consiste em substituir a expressão (7.2) na equação (7.1). Desta forma eliminamos o comportamento do conhecimento tecnológico da análise dinâmica do modelo. Com este procedimento conseguimos incorporar na função de produção o efeito da externalidade resultante da acumulação de capital. Temos assim a função de produção dada por

$$Q_t = a^{1-\alpha} K_t^{\gamma} L_t^{1-\alpha} \tag{7.5}$$

onde para simplificar utilizamos a definição $\gamma \equiv \alpha + (1-\alpha)\,\theta$.

Relativamente a esta função convém salientar a importância crucial do valor que o parâmetro θ possa assumir, quanto ao tipo de rendimentos de escala que resultam da acumulação de capital. Vejamos três casos possíveis:

- $\theta = 1 \rightarrow \gamma = 1$. *Rendimentos constantes na acumulação de capital.* A duplicação do nível do capital, leva à duplicação do nível da produção (permanecendo tudo o resto constante). Se o capital crescer 3% ao ano, a produção também crescerá 3% ao ano, obviamente se tudo o resto permanecer constante.

[3] Apenas uma equação no caso do modelo de Solow; duas equações no modelo de MRW.

- $\theta < 1 \rightarrow \gamma < 1$. *Rendimentos decrescentes na acumulação de capital.* A duplicação do nível do capital, leva ao aumento do nível da produção, mas este aumento é inferior à duplicação da mesma (permanecendo tudo o resto constante). Se o capital crescer 3% ao ano, a produção também crescerá mas a uma taxa inferior a 3% ao ano, se tudo o resto permanecer constante.

- $\theta > 1 \rightarrow \gamma > 1$. *Rendimentos crescentes na acumulação de capital.* A duplicação do nível do capital, leva ao aumento do nível da produção, mas este aumento é superior à duplicação da mesma (permanecendo tudo o resto constante). Se o capital crescer 3% ao ano, a produção também crescerá mas a uma taxa superior a 3% ao ano, se tudo o resto permanecer constante.

O segundo passo consiste no estudo do comportamento dinâmico dos três factores produtivos presentes na função de produção (7.5): A_t, L_t e K_t. Como se observa, o símbolo A desapareceu da função de produção, na medida em que todo o conhecimento tecnológico não é mais do que um efeito lateral da acumulação de capital. Portanto, o estudo da dinâmica do modelo pode resumir–se ao comportamento das variáveis L_t e K_t.

Relativamente à primeira, já sabemos como ela se comporta ao longo do tempo, pois a sua taxa de crescimento é constante e exógena: $\dot{L}_t/L_t = n$, com $n > 0$. O estudo da segunda requer um pouco mais de atenção.

Para obtermos a taxa de crescimento do stock de capital físico, $g_K = \dot{K}_t/K_t$, teremos de dividir a equação (7.4) por K_t. O resultado virá

$$g_K = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{s \cdot Q_t - \delta_K \cdot K_t}{K_t}$$

Substituindo Q_t pela sua expressão (7.5), e após uma simplificação bastante fácil, a taxa de crescimento do capital físico virá (por comodidade de análise eliminam-se os índices t de todas as variáveis)

$$g_K = sa^{1-\alpha}K^{\gamma-1}L^{1-\alpha} - \delta \tag{7.6}$$

onde se usou, com o objectivo de simplificar a simbologia, a seguinte definição $\gamma - 1 \equiv (\alpha - 1)(1 - \theta)$. [4]

A partir da análise da equação (7.6) podemos determinar o comportamento da taxa de crescimento de K_t. Note-se que esta taxa de crescimento depende do comportamento de duas variáveis do modelo, sendo elas K_t e

[4] Note que esta expressão $\gamma - 1 = (\alpha - 1)(1 - \theta)$ pode ser facilmente obtida. Por um lado temos que $\gamma = \alpha + (1 - \alpha)\theta$. Subtraíndo 1 a esta última expressão ficamos com: $\gamma - 1 = \alpha + (1 - \alpha)\theta - 1$. Se proceder à multiplicação e simplificação do lado direito desta última expressão irá obter o resultado $(\alpha - 1)(1 - \theta)$.

L_t. Para que o modelo possua uma situação de equilíbrio de longo prazo é preciso que, a partir de determinada altura, a taxa de crescimento do capital físico assuma valores constantes. Para que g_K se torne constante é condição necessária que o lado direito da equação (7.6) fique constante ao longo do tempo.

Que condições terão de se verificar para que este lado da equação fique constante? Este termo é composto por dois grupos de elementos. Primeiro existem os parâmetros (s, a e δ), os quais são sempre constantes por definição. Segundo existem as variáveis K_t e L_t que evoluem ao longo do tempo, sendo este segundo grupo de elementos que poderá fazer com que o lado direito da equação não fique constante no tempo.

No entanto, pode existir uma situação em que o comportamento destas duas variáveis não afectam o lado direito da equação (7.6), permitindo que a mesma permaneça constante com o decorrer do tempo. Este caso exige a conjugação de duas condições especiais:

- *Crescimento nulo da população.* Neste caso teremos $n = 0$ e, portanto, o nível da população será sempre constante e igual ao seu valor inicial. Como este valor inicial é conhecido, o nível da população passa a ser tratado como se de uma constante se tratasse

$$L_t = L_0$$

- *Elasticidade do conhecimento tecnológico relativamente ao capital físico unitária*: $\theta = 1$. Neste caso teremos $\gamma = 1$.[5] Se substituirmos $\gamma = 1$ na equação (7.6), o stock de capital físico passará a não afectar a evolução de g_K na medida em que $K^{\gamma-1} = K^0 = 1$. Esta taxa de crescimento, e utilizando também $n = 0$, virá

$$g_K = sa^{1-\alpha} L_0^{1-\alpha} - \delta$$

  não sendo afectada pelo nível do stock de capital físico, mesmo que este aumente permanentemente ao longo do tempo.

Um facto curioso consiste em que, conforme iremos ver de seguida, a taxa de crescimento g_K pode ter um equilíbrio de longo prazo mesmo que K_t aumente no decorrer do tempo, desde que $\theta < 1$ e $n = 0$. Ou seja, o modelo terá (ou não) um equilíbrio de longo prazo, dependendo das diferentes combinações de θ e n. Nas duas sub-secções seguintes analisamos as diferentes possibilidades que resultam das combinações de

[5] Este resultado é fácil de obter. Da definição que utilizámos acima sabemos que $\gamma - 1 \equiv (\alpha - 1)(1 - \theta)$. Substituindo $\theta = 1$ nesta expressão, obteremos $\gamma - 1 = 0$, de onde se obtem $\gamma = 1$.

crescimento nulo da população com diferentes valores para a elasticidade do conhecimento tecnológico relativamente ao capital físico. Começamos pelo caso em que não existe crescimento populacional ($n = 0$), para mais tarde introduzir este crescimento ($n > 0$).

7.2.1 A dinâmica sem crescimento populacional ($n = 0$)

Partindo de uma situação em que não se contempla a existência de crescimento populacional a análise dinâmica fica bastante simplificada na medida em que o factor trabalho passa a ser considerado como uma constante, $L_t = L_0$. Com esta hipótese, a taxa de crescimento do capital físico, g_K, ficará a depender apenas dos valores que a variável K_t assume ao longo do tempo, já que s e a são também constantes.

Por sua vez, o impacto que K_t possa ter sobre g_K depende em grande medida dos valores assumidos pelo parâmetro θ. Podemos tipificar três casos para análise, sendo eles:

$$\theta < 1 \quad , \quad \theta = 1 \quad , \quad \theta > 1$$

os quais vão produzir resultados diferentes quanto à existência de equilíbrio para o modelo.

1^o Caso: $\theta < 1$. Crescimento populacional nulo e rendimentos decrescentes na acumulação de capital.

Se o parâmetro θ for inferior a 1, o expoente da variável K_t na equação (7.6) torna-se negativo, já que $\gamma - 1 = (\alpha - 1)(1 - \theta) < 0$. Como a taxa de crescimento de K_t será dada por

$$g_K = sa^{1-\alpha} K_t^{\gamma-1} L_0^{1-\alpha} - \delta$$

e como $\gamma - 1 < 0$, então à medida que K_t cresce ao longo do tempo ($K_t \uparrow$), a taxa de crescimento convergirá para zero ($g_K \to 0$) . Repare-se que, conforme vimos acima, se $\theta < 1$ temos rendimentos decrescentes em relação à acumulação de capital físico, o que leva a que a taxa de lucro se torna cada vez menor no processo de acumulação de capital.[6] A partir de um determinado momento a produtividade marginal do capital é nula e a acumulação deste activo pára, levando ao *terminus* do crescimento económico. Este cenário gera uma situação idêntica à do modelo de Solow em que a economia possui um equilíbrio de longo prazo com as variáveis a crescerem a taxas constantes, e a economia converge para esse equilíbrio independentemente da situação de partida das mesma.

[6] Se $\theta > 1$, isto implica que como $\gamma \equiv \alpha + (1 - \alpha)\theta$, então $0 < \gamma < 1$. Olhando para a função de produção que já inclui o efeito das externalidades, $\gamma < 1$ é sinónimo da existência de rendimentos decrescentes na acumulação de capital.

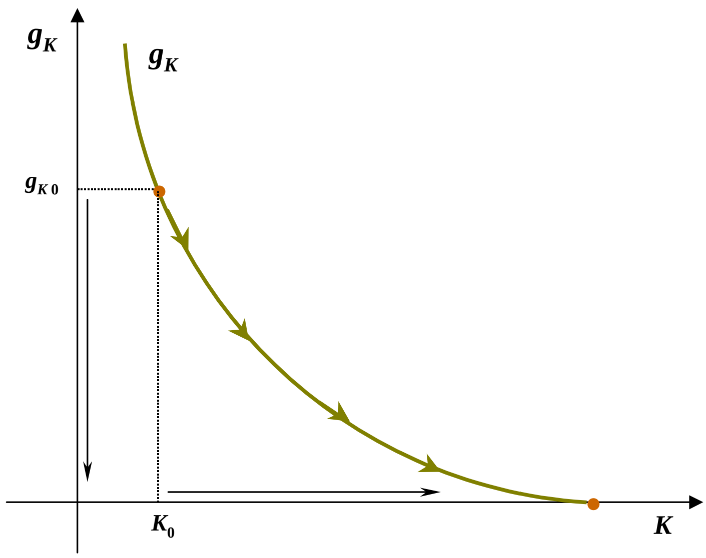

Figura 7.1: O COMPORTAMENTO DINÂMICO DA TAXA DE CRESCIMENTO DO CAPITAL FÍSICO COM $n = 0$ E $\theta < 1$

Graficamente, esta situação encontra-se representada na *Figura 7.1*, no plano (K, g_K) por uma curva decrescente onde se pode observar a diminuição progressiva da taxa de crescimento do capital físico à medida que o seu stock aumenta, até esta alcançar o valor zero. Assim, se o stock de capital inicial for K_0, a taxa de crescimento do capital é dada por g_{K_0}, e à medida que K_t aumenta ao longo do tempo, a taxa de crescimento do capital físico vai diminuindo aproximando-se assintoticamente do eixo de K_t, e tornando-se nula a partir de determinado momento.

Conclusão 7.1 *Crescimento populacional nulo e rendimentos decrescentes na acumulação de capital implicam que o modelo possui um equilíbrio de longo prazo, que é único e estável. No entanto, neste equilíbrio não existe crescimento económico, ou seja a taxa de crescimento económico é nula quando o mesmo tiver sido alcançado.*

2^o Caso: $\theta = 1$. Crescimento populacional nulo e rendimentos constantes na acumulação de capital.

Continuamos a assumir $n = 0$, mas agora o parâmetro θ é igual à unidade. Neste caso a taxa de crescimento do capital físico g_K passa a permanecer constante independentemente do valor de K_t, vindo

$$g_K = sa^{1-\alpha} L_0^{1-\alpha} - \delta$$

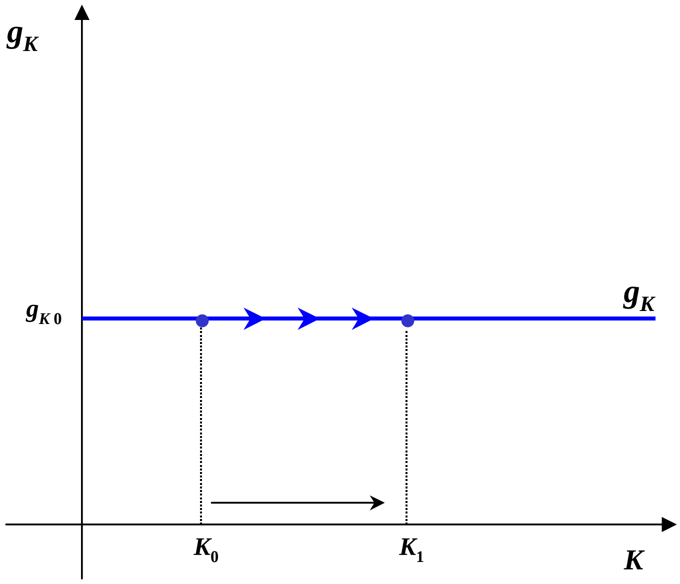

Figura 7.2: O COMPORTAMENTO DINÂMICO DA TAXA DE CRESCIMENTO DO CAPITAL FÍSICO COM $n = 0$ E $\theta = 1$

Nesta situação, a economia apresenta um equilíbrio de longo prazo, o qual está representado na *Figura 7.2,* através de uma recta paralela ao eixo do K. Vemos que o stock de capital físico cresce sempre à mesma taxa, independentemente da dimensão deste mesmo stock, mantendo-se a sua taxa de crescimento constante ao nível $g_K = sa^{1-\alpha}L_0^{1-\alpha} - \delta$. Assim, partindo de uma situação inicial com K_0, este stock tem uma taxa de crescimento positiva (note que estamos a admitir que se verifica $sa^{1-\alpha}L_0^{1-\alpha} > \delta$) o que faz com que este cresça ao longo do tempo, passando para um nível superior, por exemplo, para o nível K_1. No entanto, para este novo nível, a taxa de crescimento de K_t é exactamente igual à taxa de crescimento inicial.

Como vimos, a economia tem um equilíbrio de longo prazo, no entanto este é bastante diferente do equilíbrio que obtivémos nos modelos de crescimento exógeno, por duas razões. Primeiro, porque este equilíbrio de longo prazo é sempre obtido automaticamente, ou seja, a economia estará sempre a crescer a uma taxa constante que é idêntica para todo o seu percurso, não existindo qualquer processo de transição dinâmica no cenário que estamos aqui a descrever, aspecto que pode ser facilmente visto na *Figura 7.2.* Segundo, porque o crescimento económico neste modelo passa a ter uma natureza endógena, na medida em que g_K é afectada por forças que são determinadas pelo funcionamento da economia

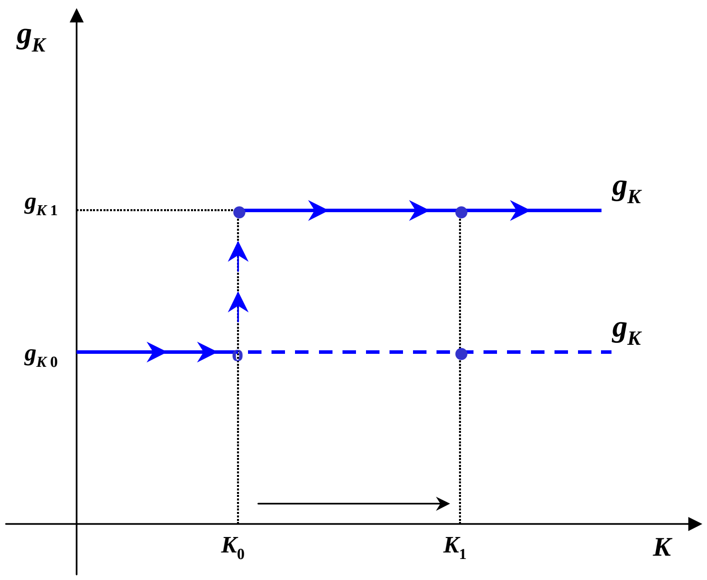

Figura 7.3: UM AUMENTO NA TAXA DE POUPANÇA *(s). O impacto sobre a taxa de crescimento de longo prazo da economia no cenário com $n = 0$ e $\theta = 1$.*

(forças não totalmente exógenas, como acontecia nos modelos de Solow e MRW). No modelo de learning by doing, e no caso específico que estamos aqui a analisar, a taxa de poupança s afecta positivamente o ritmo de crescimento económico. Por exemplo, se esta taxa aumentar a partir de determinado momento, a taxa de crescimento ”salta” automaticamente para um nível mais elevado e permanece nesse nível permanentemente ao longo do tempo, pelo menos até que qualquer outro choque afecte o funcionamento da economia. Esta situação pode ser vista na *Figura 7.3*.

Conclusão 7.2 *Crescimento populacional nulo e rendimentos constantes na acumulação de capital implicam que o modelo tem um equilíbrio de longo prazo, é único e é estável. Neste equilíbrio existe crescimento económico, ou seja a taxa de crescimento económico é positiva e constante, e este crescimento é endógeno porque a taxa de crescimento depende de factores de natureza económica (como seja a taxa de poupança).*

3^o Caso: $\theta > 1$. **Crescimento populacional nulo e rendimentos crescentes na acumulação de capital.**

O terceiro caso é aquele em que, mantendo $n = 0$, o valor de θ passa a ser superior à unidade. Se o parâmetro θ for superior a 1, o expoente da variável K_t na equação (7.6) torna-se positivo, já que

$\gamma - 1 = (\alpha - 1)(1 - \theta) > 0$. Como a taxa de crescimento de K_t será dada por

$$g_K = sa^{1-\alpha} K_t^{\gamma-1} L_0^{1-\alpha} - \delta$$

e como $\gamma - 1 > 0$, então à medida que K_t cresce ao longo do tempo ($K_t \uparrow$), a taxa de crescimento convergirá para infinito ($g_K \to +\infty$) em tempo finito.

Verificamos assim que, com $\theta > 1$, a taxa de crescimento da economia se torna explosiva, assumindo rapidamente valores cada vez mais elevados, o que não tem grande relevância económica no mundo em que vivemos porque não é minimamente confirmado por evidência empírica. Assim, se podemos encontrar economias com bons ritmos de crescimento económico nas últimas décadas, não é detectável uma única situação de crescimento onde se verificassem taxas crescentes ao longo do tempo, pelo que esta hipótese deve ser excluída como uma hipótese válida para explicar o crescimento económico contemporâneo.

Na *Figura 7.4* apresenta-se este cenário, sendo a taxa de crescimento explosiva dada por uma curva com inclinação positiva e crescente, com g_K a tender para infinito à medida que o stock de capital aumenta de dimensão. Se a economia partir de um nível inicial de capital físico representado por K_0 na referida figura, a sua taxa de crescimento será positiva, dada por g_{K_0}, o que faz com que K_t cresça, passando para um montante para o qual a sua taxa de crescimento é ainda maior, e assim sucessivamente ao longo do tempo até alcançar níveis que podemos designar por explosivos.

Conclusão 7.3 *Crescimento populacional nulo e rendimentos crescentes na acumulação de capital implicam que o modelo não tem nenhum equilíbrio de longo prazo. Neste cenário, a taxa de crescimento económico é positiva e crescente ao longo do tempo, e este crescimento é endógeno porque a taxa de crescimento depende de factores de natureza económica (como sejam, a taxa de poupança e o stock de capital).*

7.2.2 A dinâmica com crescimento populacional ($n > 0$)

Na secção anterior, o estudo do comportamento da taxa de crescimento do capital baseou-se na hipótese de que o crescimento populacional era nulo. Agora vamos investigar o que acontece à evolução da economia se existir crescimento populacional positivo, continuando a considerar os diferentes valores para θ que apresentámos na secção anterior.

Considere-se então que existe crescimento populacional positivo ($n > 0$). Isto implica que a dinâmica da população passa a obedecer à seguinte equação

$$\dot{L}_t = n \cdot L_t$$

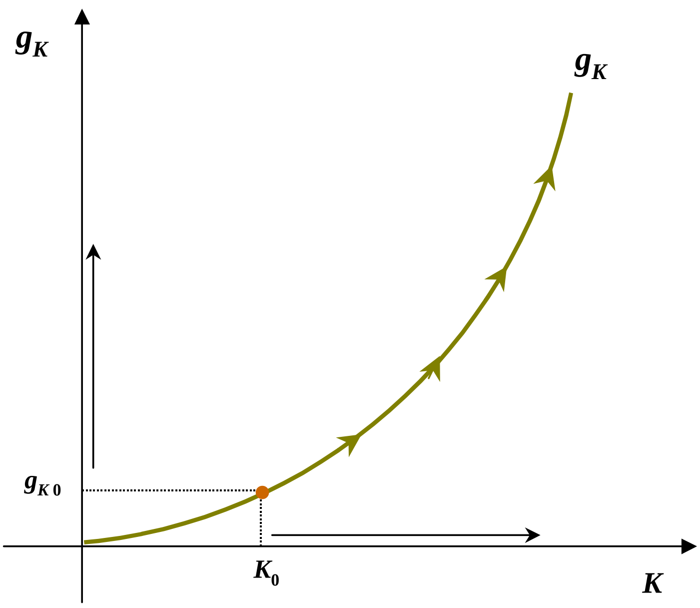

Figura 7.4: O COMPORTAMENTO DINÂMICO DA TAXA DE CRESCIMENTO DO CAPITAL FÍSICO COM $n = 0$ E $\theta > 1$

Vamos analisar a dinâmica do modelo admitindo esta nova hipótese e continuaremos a considerar os três casos relativamente a θ

$$\theta < 1 \quad , \quad \theta = 1 \quad , \quad \theta > 1$$

Note que agora L_t passa a não ser constante, crescendo todos os anos a uma taxa constante $n > 0$. Portanto, na equação (7.6) o termo $L_t^{1-\alpha}$ vai crescer todos os anos à mesma taxa, fazendo com que a taxa de crescimento do capital físico (g_K) vá também aumentar ao longo do tempo. Por outro lado, g_K pode ser também afectada pela evolução de K_t. Portanto, a análise de g_K vai agora levar em consideração as variações simultâneas em K_t e em L_t que ocorrem ao longo do tempo.

Para analisarmos o impacto destas variações simultâneas basta expressarmos a equação (7.6) em termos das taxas de crescimento das variáveis envolvidas na mesma. Assim, aplicando o método já bastante conhecido, teremos a taxa de crescimento de g_K dada por

$$\frac{\dot{g}_K}{g_K} = (\gamma - 1)\, g_K + (1 - \alpha)\, g_L \tag{7.7}$$

sendo conveniente lembrar que $\gamma - 1 = (\alpha - 1)(1 - \theta)$.

1^o Caso: $\theta < 1$. Crescimento populacional positivo e rendimentos decrescentes na acumulação de capital.

Só existirá equilíbrio de longo prazo se a taxa de crescimento de g_K for constante, pelo que a variação g_K terá de ser nula para que isto se verifique. Ou seja só existirá equilíbrio de longo prazo, se a aplicação da seguinte condição à equação (7.7) tiver uma solução explícita

$$\dot{g}_K = 0$$

Aplicando esta condição à referida equação $\dot{g}_K = [(\gamma - 1)\, g_K + (1 - \alpha)\, g_L]\, g_K = 0$, e substituindo a taxa de crescimento da população pelo seu valor, $g_L = n$, obtém–se a seguinte solução:

$$g_K = \frac{1}{1 - \theta} n \tag{7.8}$$

A equação (7.8) permite-nos então saber que, com crescimento populacional e $\theta < 1$, a taxa de crescimento do capital físico é função da taxa de crescimento do factor trabalho. Podemos também verificar que esta taxa é constante e positiva, tal como acontecia no caso $n = 0$ e $\theta = 1$. Assim, a introdução do crescimento populacional no modelo levou a que este passe a produzir os resultados semelhantes aos do modelo de Solow mesmo quando $\theta < 1$, passando a existir crescimento positivo no equilíbrio de longo prazo e sendo este dependente da taxa de crescimento da população. Este caso agora apresentado corresponde ao estudado por Arrow (1962) no seu trabalho sobre o modelo *learning-by-doing*. Ao partir destas hipóteses, Arrow procurou melhorar o modelo de Solow introduzindo uma explicação para a ocorrência de progresso no conhecimento tecnológico, contudo, o autor acabou por produzir os mesmos resultados.

Na *Figura 7.5* apresentamos uma simulação numérica para mostrar que este cenário tem um equilíbrio estável, com uma taxa de crescimento que é determinada pelo nível da taxa de crescimento da população. Suponha uma economia com os seguintes valores para os vários parâmetros que são necessários para correr a simulação: $\theta = 0.6$, $n = 0.01$, $\alpha = 0.4$. Com $\theta = 0.6$ teremos que $\gamma - 1 = -0.24$, substituindo este valor na equação (7.7), bem como $n = 0.01$ e $\alpha = 0.4$, teremos a seguinte equação diferencial para o comportamento dinâmico de g_K

$$\dot{g}_K = -0.24\,(g_K)^2 + 0.006 \cdot g_K$$

Suponha agora que a condição inicial satisfaz a seguinte restrição

$$g_K(0) > 0$$

Como se pode facilmente visualizar na referida figura, qualquer que seja a taxa de crescimento inicial do stock de capital — quer ela seja de 6%, 3.5%, 1% , ou qualquer outro valor positivo — a economia acaba por obter ao fim de um longo período de tempo uma taxa de crescimento para esta variável que é constante, e permanece assim ao longo do tempo. Neste exemplo numérico esta taxa é de 2.5%, a qual resulta da substituição dos valores dos parâmetros na equação (7.8): $g_K = [1/(1-\theta)]\,n$. Ou seja, $[1/(1-0.6)]\,0.01 = 0.025$.

Conclusão 7.4 *Crescimento populacional positivo e rendimentos decrescentes na acumulação de capital implicam que o modelo tem um equilíbrio de longo prazo, que é único e estável. Neste equilíbrio existe crescimento económico, ou seja a taxa de crescimento económico é positiva e constante, mas este crescimento é exógeno porque a taxa de crescimento não depende de factores de natureza económica (depende apenas da taxa de crescimento da população que é exógena neste modelo). Temos um retorno ao modelo de Solow no caso deste cenário.*

2^o Caso: $\theta = 1$. Crescimento populacional positivo e rendimentos constantes na acumulação de capital.

Continuamos a admitir crescimento populacional ($n > 0$), mas atribuímos ao parâmetro θ um valor igual à unidade. Substituindo o valor de

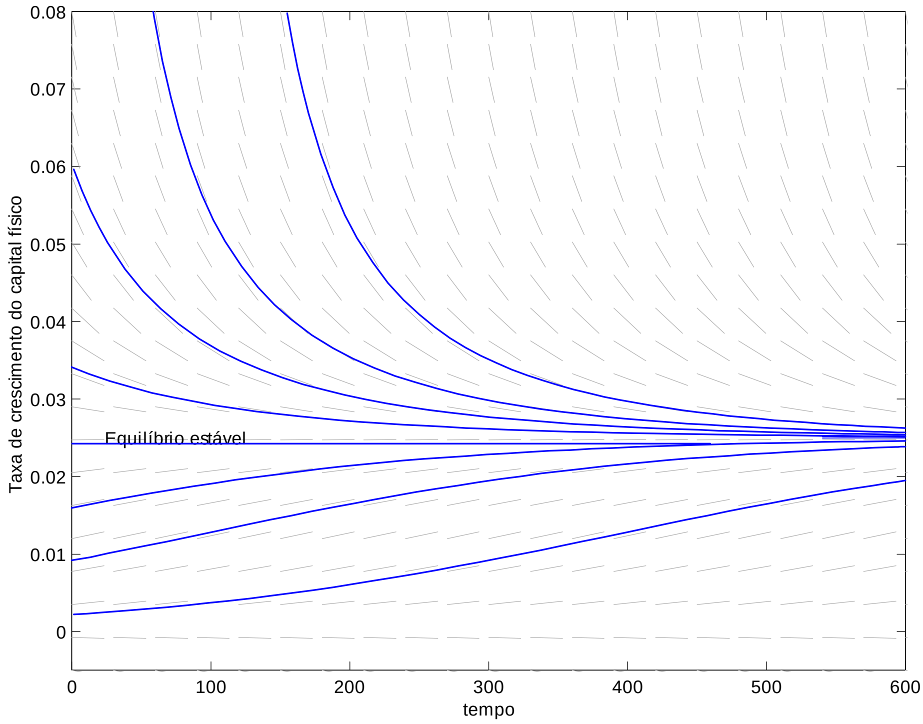

Figura 7.5: SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CENÁRIO EM QUE $n > 0$ E $\theta < 1$. *Nesta situação, a economia tem um equilíbrio de longo prazo, o qual é único e estável.*

$\theta = 1$ na equação (7.7), e substituindo também $g_L = n$, esta virá

$$\frac{\dot{g}_K}{g_K} = (1 - \alpha)\, n$$

Podemos facilmente verificar que a imposição da condição subjacente ao equilíbrio de longo prazo ($\dot{g}_K$) nesta última equação, não terá uma solução explícita. Ou seja, como $n > 0$, e $\alpha < 1$, g_K não terá um valor constante para o qual tenda no longo prazo, crescendo permanentemente ao longo do tempo. Portanto neste cenário a economia não terá um equilíbrio de longo prazo.

Este ponto pode ser confirmado através de um outro método. Observando a equação (7.6), nota–se que com $\theta = 1$ o expoente de K_t se anula, e a taxa de crescimento do capital passa a ser dada pela expressão

$$g_K = sa^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha} - \delta$$

onde $sa^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}$ é sempre *crescente* porque L cresce todos os anos à taxa $n > 0$. Os resultados são facilmente previsíveis: teremos a taxa de crescimento do capital físico a tender para infinito ($g_K \rightarrow \infty$) à medida que se vai verificando o crescimento populacional. Mais uma vez a introdução de crescimento populacional gerou crescimento explosivo da taxa de crescimento do capital, pelo que estas duas hipóteses combinadas ($n > 0$ e $\theta = 1$) não são muito realistas.

Na *Figura 7.6* encontra-se representado um exemplo numérico que ilustra o caso que estamos a analisar ($n > 0$ e $\theta = 1$). Os parâmetros utilizados para proceder à simulação são os seguintes: $\theta = 1$, $n = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $s = 0.24$, $L_0 = 25$, $\delta = 0.1$, $a = 0.01$. Na abcissa temos o tempo. No painel da esquerda encontramos os valores assumidos pelo factor trabalho ao longo do tempo (L_t), que crescem a uma taxa anual de 1% e, enquanto que o painel da direita representa os valores assumidos pela taxa de crescimento do capital (g_K) que, como sabemos, depende dos valores de L_t. Pode-se facilmente constatar que, à medida que L_t vai crescendo, a taxa de crescimento do capital físico cresce também, atingindo valores cada vez maiores que se tornarão explosivos. Note que no ano 150 esta taxa assume já o valor de 16%, o que é muito pouco realista no mundo em que vivemos.

Conclusão 7.5 *Crescimento populacional positivo e rendimentos constantes na acumulação de capital implicam que o modelo não tem nenhum equilíbrio de longo prazo. Neste cenário, a taxa de crescimento económico é positiva e crescente ao longo do tempo, e este crescimento é endógeno porque a taxa de crescimento depende de factores de natureza económica (como seja a taxa de poupança), embora seja também positivamente afectada pelo nível da população que cresce exogenamente.*

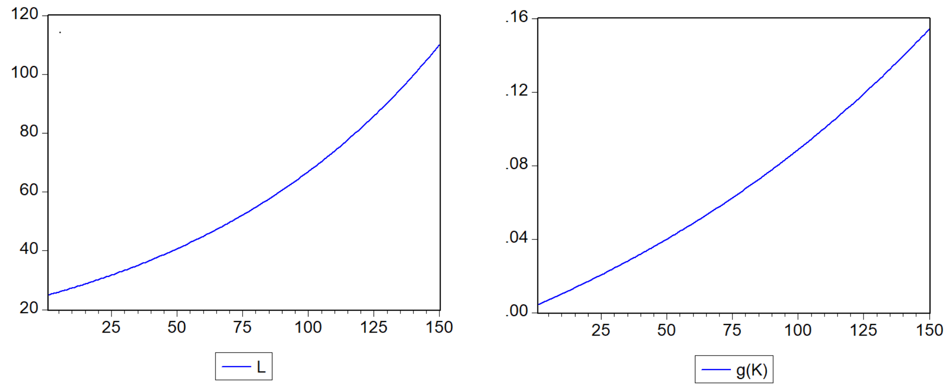

Figura 7.6: CRESCIMENTO DO STOCK DE CAPITAL NO CENÁRIO*: $n > 0$, $\theta = 1$. Os parâmetros utilizados para proceder à simulação são os seguintes:* $\theta = 1$, $n = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $s = 0.24$, $L_0 = 25$, $\delta = 0.1$, $a = 0.01$. *Na ordenada estão representados os valores das variáveis* L_t *e* g_K*, enquanto que na abcissa temos o tempo.*

3º Caso: $\theta > 1$. Crescimento populacional positivo e rendimentos crescentes na acumulação de capital.

O crescimento explosivo que acabámos de descrever no caso anterior fica ainda mais explosivo se conciliarmos crescimento populacional ($n > 0$) com o parâmetro θ a assumir valores superiores à unidade ($\theta > 1$). Nesta situação, g_K cresce não somente porque L cresce ao longo do tempo, mas também porque K vai aumentando. Também este caso não é realista, pelo que deveremos excluir estas hipóteses do modelo de forma a que o mesmo possa descrever de forma minimamente aceitável a realidade económica contemporânea.

Na *Figura 7.7* apresentamos uma simulação numérica para mostrar que este cenário não tem um equilíbrio de longo prazo, apresentando uma taxa de crescimento que é crescente ao longo do tempo. Suponha uma economia com os mesmos valores para os vários parâmetros necessários para correr a simulação que utizámos na simulação numérica feita no 1º caso. Obviamente a excepção é que agora $\theta > 1$. Estes parâmetros são os seguintes: $\theta = 1.4$, $n = 0.01$, $\alpha = 0.4$. Com $\theta = 1.4$ teremos $\gamma - 1 = +0.24$, substituindo este valor na equação (7.7), bem como $n = 0.01$ e $\alpha = 0.4$, teremos a seguinte equação diferencial para o comportamento dinâmico de g_K

$$\dot{g}_K = 0.24 \left(g_K\right)^2 + 0.006 \cdot g_K$$

Continuamos a utilizar condições inicias que satisfaçam a mesma restrição

$$g_K(0) > 0.$$

Como se pode facilmente visualizar na referida figura, qualquer que seja a taxa de crescimento inicial do stock de capital — quer ela seja de 2%, 4%, 6% , ou qualquer outro valor positivo — a economia obtém uma taxa de crescimento crescente para o stock de capital. Vejamos o caso da condição de partida em que $g_K(0) = 0.02$. Neste caso, a economia terá ao fim de 100 anos uma taxa de crescimento para o stock de capital perto dos 12% ao ano, e aumentando se considerarmos um período de tempo mais dilatado. Por exemplo, os EUA tinham uma taxa semelhante no princípio do século passado, mas não existe a mínima evidência da mesma ter aumentado ao longo dos últimos cem anos. Suponha agora que a condição de partida seria $g_K(0) = 0.04$. Neste caso, uma economia obteria em cerca de sessenta anos uma taxa de crescimento de K_t de cerca de 20% ao ano. Estas situações não estão de acordo com os factos fundamentais da realidade económica das sociedades em vivemos presentemente, e, portanto, este cenário deve ser rejeitado como um instrumento teórico para analisar a própria realidade económica.

Neste exemplo numérico visualizamos facilmente o significado económico que terá a existência de rendimentos crescentes na acumulação de capital: caso estes fossem verificados na realidade, as economias que deles usufruíssem deveriam ter hoje taxas de crescimento muitíssimo superiores àquelas que a realidade contemporânea nos apresenta. Por isso, a existência de rendimentos crescentes na acumulação de um factor produtivo fundamental (aqui é o capital, mas pode ser outro qualquer factor) é uma hipótese que é normalmente utilizada com grande frequência em certo tipo de discurso (dentro e fora da economia), mas não faz grande sentido económico como se pode verificar através do exemplo que aqui apresentamos.

Conclusão 7.6 *Crescimento populacional positivo e rendimentos crescentes na acumulação de capital implicam que o modelo não tem nenhum equilíbrio de longo prazo. Neste cenário, a taxa de crescimento económico é positiva e crescente ao longo do tempo, e este crescimento é endógeno porque a taxa de crescimento depende de factores de natureza económica (como sejam a taxa de poupança e os stock de capital), embora seja também positivamente afectada pelo nível da população que cresce exogenamente.*

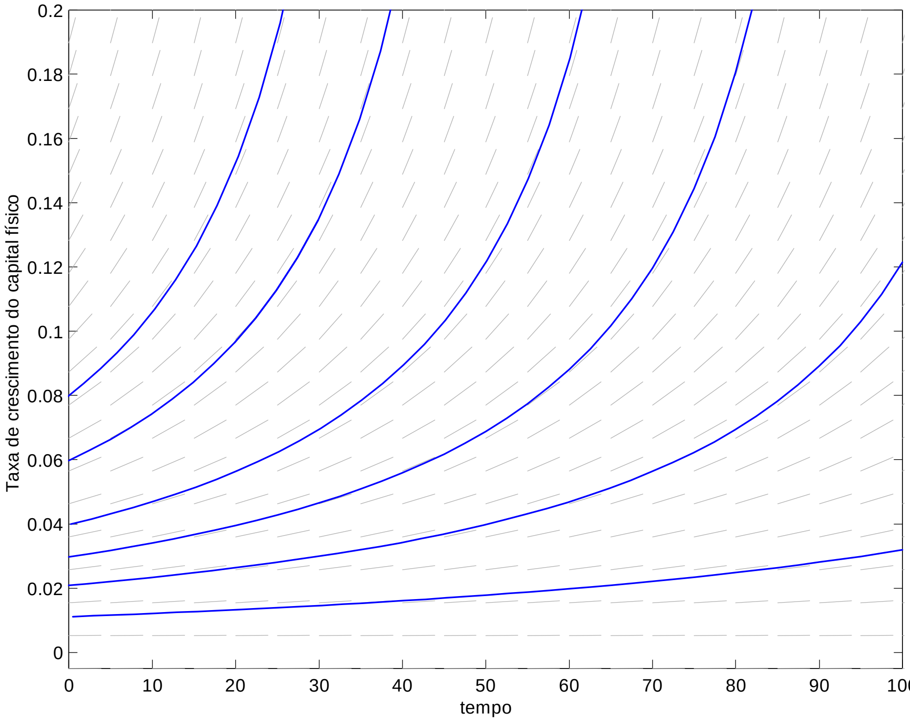

Figura 7.7: SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CENÁRIO EM QUE $n > 0, \theta > 1$. *Nesta situação, a economia não tem um equilíbrio de longo prazo, exibindo taxas de crescimento crescentes e explosivas ao longo do tempo.*

7.3 O Crescimento no Equilíbrio de Longo Prazo

Neste ponto a nossa preocupação é, à semelhança do que foi feito nos capítulos anteriores, determinar o comportamento das diferentes variáveis endógenas no equilíbrio de longo prazo. Pretende-se conhecer as taxas de crescimento de variáveis como o produto, o consumo e o capital naquele equilíbrio e isto para os valores absolutos das variáveis, mas também para os seus valores em termos per capita. Para tal vamos escolher, das várias situações anteriormente tipificadas, dois casos em que exista equilíbrio de longo prazo para o modelo, um em que o crescimento populacional seja nulo e outro em que haja crescimento populacional positivo.

7.3.1 Crescimento populacional nulo $(n = 0)$

Assumindo que o crescimento populacional é nulo, o modelo comporta um equilíbrio de longo prazo quando o parâmetro θ assume valores iguais ou inferiores à unidade ($\theta \leq 1$). Vamos aqui concentrarmo-nos apenas no caso $\theta = 1$. Neste caso, a taxa de crescimento do capital físico é dada pela expressão

$$g_K = sa^{1-\alpha} L_0^{1-\alpha} - \delta$$

que é constante pois corresponde à soma de um conjunto de parâmetros.

A partir daqui podemos calcular as restantes taxas de crescimento da economia. A primeira taxa de crescimento que vamos determinar é a do produto final (g_Q) que podemos obter através da logaritmização e diferenciação da equação (7.5). A expressão para g_Q será dada por

$$g_Q = \gamma g_K + (1 - \alpha)\, g_L \tag{7.9}$$

com $\gamma = \alpha + (1 - \alpha)\,\theta$. Sabendo que no caso em que estamos a estudar $g_L = n = 0$, e ainda que estamos a considerar $\theta = 1$, a expressão anterior resulta em

$$g_Q = g_K$$

Portanto, no equilíbrio de longo prazo, a taxa de crescimento de Q, o produto total, é exactamente igual à taxa de crescimento do capital físico, sendo, portanto, uma taxa constante e estável dada pela soma de um conjunto de parâmetros.

Falta-nos ainda determinar a taxa de crescimento do consumo agregado, C. Sabendo que $Q = C+I$ e que $I = sQ$, facilmente verificamos que $C = (1 - s)\, Q$. A partir daqui é fácil calcular a taxa de crescimento de C através também da logaritmização e diferenciação desta última equação que (e sabendo que s é um parâmetro) resulta em

$$g_C = g_Q$$

Daqui pode-se ver que, no estado estacionário, a taxa de crescimento do consumo também coincide com a taxa de crescimento do produto e com a taxa de crescimento do capital físico. A principal conclusão é que, no equilíbrio de longo prazo, todas as variáveis absolutas crescem à mesma taxa, positiva, constante e estável, $g^{\star}$:

$$g^{\star} = g_K = g_Q = g_C = sa^{1-\alpha} L_0^{1-\alpha} - \delta$$

Quanto às variáveis consideradas em termos per capita, note-se que, na ausência de crescimento populacional, a variável L permanece constante durante toda a dinâmica do modelo. Logo, em qualquer momento do tempo, teremos uma igualdade entre as taxas das variáveis consideradas em termos per capita e as das variáveis em termos absolutos, portanto, $g_{K/L} = g_K$, $g_{Q/L} = g_Q$ e $g_{C/L} = g_C$.

7.3.2 Crescimento populacional positivo $(n > 0)$

Quando consideramos a existência de crescimento populacional positivo, a única hipótese que podemos admitir para valores do parâmetro θ de forma a que o modelo possua um equilíbrio de longo prazo é $\theta < 1$. Nesta situação, como vimos numa secção anterior, a taxa de crescimento do capital físico é dada por

$$g_K = \frac{1}{1-\theta} n$$

A partir daqui é possível calcular as taxas de crescimento do produto e do consumo ambos em termos dos seus valores absolutos. A taxa de crescimento do produto é determinada, como vimos, a partir da logaritmização e diferenciação da equação (7.5), ficando $g_Q = \gamma g_K + (1-\alpha) g_L$, com $\gamma = \alpha + (1-\alpha)\theta$. Substituindo nesta expressão as expressões já conhecidas para g_K e g_L e procedendo a alguma simplificação algébrica, ficamos finalmente com uma expressão para a taxa de crescimento do produto que vem

$$g_Q = \frac{1}{1-\theta} n$$

Portanto, a taxa de crescimento da produção da economia é exactamente igual à taxa de crescimento do capital físico, como acontecia no caso sem crescimento populacional.

Vamos agora calcular a taxa de crescimento do consumo que, como também já verificámos, é exactamente coincidente com a taxa de crescimento do produto, donde temos

$$g_C = \frac{1}{1-\theta} n$$

Portanto, tal como no caso em que $n = 0$ e $\theta = 1$, no caso que estamos aqui a considerar ($n > 0$ e $\theta < 1$), no equilíbrio de longo prazo as taxas de crescimento das variáveis medidas em valores absolutos são idênticas, vindo

$$g^{\star} = g_Q = g_C = g_K = \frac{1}{1-\theta}n$$

Vemos também que esta taxa é função positiva da taxa de crescimento do factor trabalho (n), isto é, quanto maior a taxa de crescimento da população maior o seu ritmo de crescimento no equilíbrio de longo prazo. Por outro lado, quanto maior o valor do parâmetro θ, que mede a externalidade do capital físico, menor será o denominador da expressão da taxa de crescimento, e maior será esta taxa de crescimento.

Podemos também determinar a taxa de crescimento das variáveis em termos per capita. Como as taxas de crescimento das variáveis em valores absolutos são todas iguais, basta calcular a taxa de crescimento de uma destas variáveis em termos per capita para termos a taxa de crescimento de qualquer variável medida nestes termos. Calculemos então a taxa de crescimento do capital em termos per capita, que será dada por $g_{K/L} = g_K - g_L = g_K - n$, sendo o seu resultado, após uma fácil simplificação, dado por

$$g_{K/L} = \frac{\theta}{1-\theta}n \tag{7.10}$$

Podemos então escrever a taxa de crescimento das diferentes variáveis em termos per capita que virá

$$g_{Q/L} = g_{C/L} = g_{K/L} = \frac{\theta}{1-\theta}n$$

Como vemos, também a taxa de crescimento das variáveis endógenas quando consideradas em termos per capita é uma função da taxa de crescimento do factor trabalho e do valor do parâmetro θ. Mais uma vez, quanto maior a taxa de crescimento populacional, e quanto maior a externalidade gerada pelo capital físico, maior será também a taxa de crescimento das variáveis em termos per capita. Por outro lado, confirmamos aqui o resultado já alcançado na secção anterior: se o crescimento populacional for nulo, ($n = 0$), a taxa de crescimento da economia no longo prazo é também nula, se o parâmetro θ assumir valores inferiores à unidade ($\theta < 1$).

7.4 O Modelo AK

De entre os modelos de crescimento endógeno que tenham as três seguintes características:

- existe apenas um sector de actividade
- existem rendimentos constantes na acumulação de capital
- o factor trabalho permanece constante no longo prazo

pode–se apresentar um modelo muito simples que permite sintetizar ou resumir todos os restantes. Este modelo é designado por modelo AK, e foi apresentado em 1991 por Sérgio Rebelo, um economista português presentemente na Northwestern University.[7]

Como vimos no modelo *learning-by-doing*, entre os vários casos que analisámos existe um que satisfaz aquelas três características. O modelo apresenta apenas um sector de actividade — note que o conhecimento tecnológico não é produzido num sector de actividade diferente da produção de bens físicos, ele surge como um mero efeito lateral (externalidade) do processo de acumulação de capital físico, pelo que neste modelo existe de facto só um sector de actividade — e o modelo pode satisfazer as duas restantes características se assumirmos as seguintes hipóteses: $n = 0$ e $\theta = 1$. Isto é se eliminarmos o crescimento da população e se considerarmos que a elasticidade do conhecimento tecnológico em relação ao capital físico é unitária (o que significa que existem rendimentos constantes na acumulação de capital), ficamos com um modelo em que a produção é linear em relação ao capital físico e que tem a forma simples

$$Q_t = AK_t$$

Vamos partir da representação do modelo *learning-by-doing* para demonstrarmos este resultado.

7.4.1 Apresentação do modelo

Recuperando a expressão da função de produção do modelo *learning-by-doing* após termos internalizado o efeito da externalidade do capital físico sobre o conhecimento tecnológico, dada por $Q_t = a^{1-\alpha} K_t^{\gamma} L_t^{1-\alpha}$, podemos observar que:

- Assumindo que existe crescimento populacional nulo ($n = 0$), implica que $L_t = L_0$
- Assumindo $\theta = 1$, teremos $\gamma = 1$, na medida em que por definição $\gamma = \alpha + (1 - \alpha)\,\theta$.

[7] A referência completa é a seguinte: Rebelo, S. (1991), "Long–Run Policy Analysis and Long–Run Growth", *Journal of Political Economy*, 99, 500–521.

Substituindo estes resultados na expressão da função de produção acima, esta resultará numa função linear relativamente a K_t, vindo

$$Q_t = \underbrace{(aL_0)^{1-\alpha}}_{A} \cdot K_t$$

onde $A = (aL_0)^{1-\alpha}$ é uma constante porque o factor trabalho não varia ao longo de todo o período de análise (sendo sempre igual a L_0), e a ser um mero parâmetro.

Desta forma, é possível reescrever a função de produção de uma forma mais simples e linear em relação ao capital, vindo

$$Q_t = A \cdot K_t \tag{7.11}$$

A partir daqui podemos facilmente analisar a dinâmica de uma economia caracterizada por uma função de produção deste tipo. Temos a equação diferencial habitual para a evolução dinâmica do capital físico onde este corresponde ao investimento (que é tudo aquilo que não é consumido na economia, sendo antes poupado, $I_t = s \cdot Q_t$) ao qual se retira a depreciação do stock de capital já existente ($\delta \cdot K_t$), ficando

$$\dot{K}_t = s \cdot Q_t - \delta \cdot K_t \tag{7.12}$$

Da análise da equação (7.11) podemos ver que não existe qualquer outro factor de produção para além do capital físico pelo que não temos que nos preocupar com a evolução dinâmica de outras variáveis. As equações (7.11) e (7.12) resumem assim o modelo AK, cuja dinâmica passaremos então a estudar.

7.4.2 A dinâmica do modelo

Neste ponto pretendemos saber se um modelo do tipo AK contempla a existência de um equilíbrio de longo prazo, e caso o equilíbrio exista, se este será único e estável. Vamos socorrermo-nos novamente do método das taxas de crescimento para tal fim, como fizémos na análise do modelo *learning–by–doing*. O nosso primeiro passo consiste em substituir na equação (7.12), que nos dá a dinâmica do capital físico, a expressão da função de produção da equação (7.11), pelo que temos

$$\dot{K}_t = sAK_t - \delta K_t \tag{7.13}$$

Podemos agora calcular a taxa de crescimento do capital físico dada por $g_K = \dot{K}/K$, dividindo a equação (7.13) por K_t, vindo esta então (para simplificar eliminamos agora os índices t)

$$g_K = \dot{K}/K = sA - \delta \tag{7.14}$$

Como é visível, a taxa de crescimento do capital físico depende apenas de parâmetros (s, A e δ), sendo, portanto, constante ao longo do tempo.

Por outro lado, a taxa de crescimento do produto coincide com a taxa de crescimento do capital físico como podemos ver a partir da função de produção, pois A é uma constante. Portanto,

$$g_Q = g_K = sA - \delta$$

Assim, tal como se verificava no modelo *learning–by–doing*, temos uma igualdade entre todas as taxas de crescimento, as quais são constantes ao longo do tempo. No entanto, existe uma diferença entre o modelo AK e a maioria dos casos que estudámos no modelo *learning–by–doing:* o modelo AK não tem dinâmica de transição. Note-se que, em qualquer momento do tempo, a economia cresce sempre à mesma taxa dada por $g_Q = sA - \delta$, logo, podemos considerar que a economia está sempre no equilíbrio de longo prazo, na medida em que estará sempre a crescer a uma taxa constante. Se a economia sofrer um choque que altere o seu stock de capital físico, a economia passa imediatamente a crescer à mesma taxa fixa $sA - \delta$.

Na *Figura 7.8* apresentamos uma representação gráfica da dinâmica do modelo. Como se pode facilmente ver, desde que $sA > \delta$, a economia tem uma taxa de crescimento constante, independentemente do nível do stock de capital da economia. Se por outro lado, a economia aumentar a sua taxa de poupança de s_0 para s_1, a taxa de crescimento salta instantaneamente para um nível mais elevado dado pela diferença entre as duas rectas sA e δ.

De facto, este modelo AK não é mais do que uma simplificação em termos de simbologia do 2^o caso do cenário em que não havia crescimento da população que analisámos no modelo de *learning–by–doing*. Todos os resultados são coincidentes:

Conclusão 7.7 *Uma economia com crescimento populacional nulo e rendimentos constantes na acumulação de capital tem um equilíbrio de longo prazo, o qual é único e estável. Neste equilíbrio existe crescimento económico, porque a taxa de crescimento económico é positiva e constante. Finalmente, este crescimento é endógeno porque a taxa de crescimento depende de factores de natureza económica, como seja a taxa de poupança.*

7.5 Sumário

Dos dois modelos que analisámos neste capítulo existem quatro conclusões fundamentais:

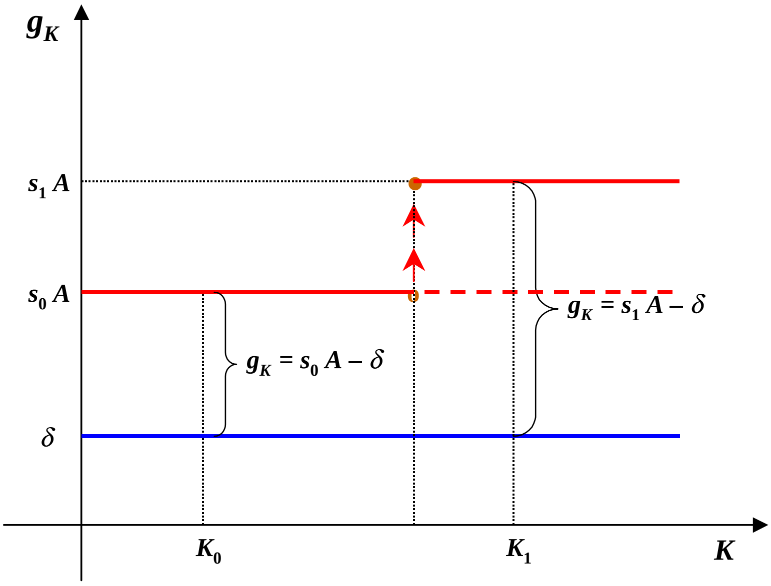

Figura 7.8: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO DO MODELO *AK. A taxa de crescimento do stock de capital é constante independentemente do nível deste stock na economia. Caso a taxa de poupança sofra um aumento a partir de um determinado momento no tempo, a taxa de crescimento sofre um aumento que é instantâneo. Por isso não existem efeitos de transição dinâmica neste modelo.*

1. Para que a economia apresente um equilíbrio de longo prazo, com crescimento positivo e constante, duas condições terão de ser verificadas:

   (a) Rendimentos constantes na acumulação de capital e crescimento nulo da população (crescimento de natureza endógena);

   (b) Rendimentos decrescentes na acumulação de capital e crescimento positivo da população (crescimento de natureza exógena).

2. A existência de rendimentos crescentes na acumulação de capital leva necessariamente à inexistência de equilíbrio de longo prazo, e à existência de taxas de crescimento económico crescentes (e explosivas) ao longo do tempo, independentemente do factor trabalho crescer ou não no longo prazo. Neste caso temos crescimento endógeno, mas taxas de crescimento crescentes são facilmente rejeitadas pela realidade económica ao nosso dispor.

3. Rendimentos decrescentes na acumulação de capital e crescimento nulo da população leva à estagnação da economia. No equilíbrio de longo prazo, a economia tem uma taxa de crescimento nula.

4. O modelo AK consiste numa simplificação do primeiro caso acima referido (rendimentos constantes na acumulação de capital e crescimento nulo da população), e reproduz integralmente os resultados deste cenário.

5. Finalmente, deve reter o seguinte: esta relação entre rendimentos constantes na acumulação de capital e a necessidade de manter o outro factor constante ao longo do tempo (no caso dos modelos aqui considerados o ”outro factor” é a população), como uma condição necessária para a existência de um equilíbrio de longo prazo (estável e único) é comum a qualquer outro modelo de crescimento endógeno. Por isso, este modelo de ”learning–by–doing” permite analisar de uma forma relativamente simples praticamente todas as questões fundamentais relacionadas com crescimento económico, como sejam: a natureza do crescimento ser endógena ou exógena, a existência ou não de um equilíbrio de longo prazo, existirem taxas de crescimento estáveis ou estas serem explosivas ao longo do tempo. Estes problemas são centrais no crescimento económico, quer nos modelos de um sector de actividade que acabámos de estudar, quer mesmo em modelos com dois sectores de actividade que iremos estudar nos capítulos seguintes.